Propagation de l'onde de pression dans un conduit déformable en présence d'un champ magnétique statique externe

Agnès Drochon[1*], **Antoinette Benoit-de-Coignac**[2], **Stéphen Ozanne**[2] **et Dima Abi-Abdallah**[3]

1. UMR CNRS 6600, Université de Technologie de Compiègne, France ; agnes.drochon@utc.fr*
2. ENSEEIHT, Toulouse, France ; 3. CIERM, Hôpital Kremlin-Bicêtre, France

Contexte de l'étude: Un certain nombre de pathologies cardiovasculaires (par exemple l'athérosclérose) sont associées à une perte d'élasticité des artères. La mesure de la célérité de l'onde de pression est un indicateur couramment utilisé pour caractériser la compliance des artères (aorte, carotides, …). L'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM) est une technique qui permet d'accéder à cette mesure [1]. Le présent travail a pour but d'évaluer par un calcul théorique l'influence du champ B_0 sur l'écoulement du sang dans un conduit cylindrique déformable et sur la vitesse de propagation de l'onde. Une telle influence pourrait conduire à une interprétation clinique erronée des mesures de célérité effectuées.

Position du problème: Les équations du problème sont posées sous les hypothèses suivantes : l'écoulement principal du sang dans le tube est longitudinal (selon z); la composante radiale de la vitesse, liée à la déformabilité du vaisseau, est petite devant la composante longitudinale. Le sang est considéré comme un fluide newtonien, incompressible. La paroi du tube est mince, élastique, isotrope. Le champ B_0 est transverse au vaisseau ; les champs électriques et magnétiques induits sont négligés. La longueur d'onde de l'onde de pression est grande devant le rayon du tube. Ainsi, il est possible de conduire un calcul semblable à celui effectué par Womersley [2] et par Atabek et Lew [3], sauf que l'écriture des équations de Navier-Stokes (décrivant le mouvement du fluide) est modifiée par la présence de la force de Lorentz. Cette force résulte du mouvement des particules chargées du sang dans le champ magnétique. Son expression fait intervenir la vitesse du sang, le champ B_0, et la conductivité électrique du sang (σ). Les équations décrivant le mouvement de la paroi du vaisseau et les conditions aux limites traduisant le couplage fluide-paroi sont identiques à celles de [2] et [3].

Méthode de résolution: Elle est exposée (ainsi que les résultats obtenus) dans [4]. La solution des équations du problème est recherchée sous la forme d'ondes forcées, harmoniques en t et z ; c'est-à-dire que les variables (pression, vitesses longitudinales et radiales du fluide, déplacements de la paroi) s'écrivent sous la forme $X(r,t,z) = X^*(r)\exp[i\omega(t-(z/c))]$, avec i tel que $i^2=-1$, ω la pulsation de l'écoulement et c, la célérité (complexe) de l'onde. Le déroulement du calcul conduit à une équation de dispersion dont les inconnues sont les célérités c de l'onde.

Célérités de l'onde: Les solutions de l'équation de dispersion (Table1) font apparaître deux modes de propagation différents : le mode de Young, qui correspond à l'onde de pression habituellement mesurée en clinique, et le mode de Lamb qui correspond à la propagation d'une onde longitudinale dans la paroi du vaisseau, modifiée par la présence du fluide. Ce mode de vibration de Lamb ne représente pas la physiologie car, en réalité, les déplacements longitudinaux de la paroi du vaisseau sont contraints par les tissus environnants. Les résultats de la Table 1 montrent que le module des célérités du mode de Young diminue lorsque le nombre de Hartmann (proportionnel au champ magnétique) augmente et que cet effet devient sensible à partir de $H_a = 4$. Dans la gamme des valeurs de Hartmann correspondant à un examen d'IRM classique ($B_0 = 1.5T$), H_a est de l'ordre de 0.2, donc l'effet du champ B_0 sur la célérité de l'onde reste négligeable.

H_a	0	1.2	2	4	10	20
$\lvert c_{Young} \rvert$ (m/s)	9.384	9.383	9. 381	9.361	8.884	6.415
$\lvert c_{Lamb} \rvert$ (m/s)	30.769	30.775	30.784	30.826	31.033	31.116

*Table*1: *Modules des célérités obtenues pour des nombres de Hartmann croissants et pour les deux modes de propagation. Données utilisées pour le calcul : η, viscosité du sang = 4 10^{-3} Pa.s ; ρ, masse volumique du sang = 1050 kg/m^3 ; σ = 0.5 S/m ; E, module d'Young de la paroi du vaisseau = 10^6 Pa ; ν, coefficient de Poisson = 0.5 ; h, épaisseur de la paroi = 2mm ; ρ_ω, masse volumique de la paroi = 1100 kg/m^3; R, rayon du vaisseau = 1cm ; ω = 7.85 rd/s (75bpm) ; $H_a = RB_0\sqrt{\sigma/\eta}$.*

Références

[1] E. Laffon, R. Marthan, M. Montaudon et al., "Feasibility of aortic pulse pressure and pressure wave velocity MRI measurement in young adults ", J. of Magnetic Resonance Imaging **21**, pp. 53-58 (2005).
[2] J. Womersley, "Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. I-The linear approximation for long waves ", Phil. Mag. **46**, pp. 199-221 (1955).
[3] H. Atabek and H. Lew, "Wave propagation through a viscous incompressible fluid contained in an initially stressed elastic tube ", Biophysical Journal **6**, pp. 481-503 (1966).
[4] Rapports de stage ingénieur de A. Benoit-de-Coignac (2010) et de S. Ozanne (2009) ; article en cours de rédaction.